数学の出題のねらい

数Ｉ・Ａに関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，数と式についての基礎的な計算能力，不等式について考察する能力，図形の性質と定理を応用する能力，事象の考察に場合の数と確率を活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

第 1 問

問題 1
通分して整理すると

$$\frac{\sqrt{3}\left\{\left(1+2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)+\left(1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\right\}}{\left(1+2\sqrt{3}\right)^2-5}$$
$$=\frac{6+\sqrt{3}}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{9-4\sqrt{3}}{2}$$

より

$$\frac{1}{2}(9-4\sqrt{3})$$

問題 2
2 進法で表された数 $10011_{(2)}$を 10 進法で表す（以下では，10 進法の$_{(10)}$は省略する.）.

$$1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=19$$

となる.
次に 7 進法で表された数 $23_{(7)}$を 10 進法で表す.

$$2\cdot 7^1+3\cdot 7^0=17$$

となる.
$10011_{(2)}+23_{(7)}$ の計算結果を 10 進数で表すと 36 となる．10 進法で表された数 36 を 5 進法で表すためには，36 を商が 0 になるまで 5 で割る割り算をして，出てきた余りを逆に並べるとよい.
36 を 5 で割ると商は 7，余りは 1 である．余り 1 が 5^0 の位の数字である.
7 を 5 で割ると商は 1，余りは 2 である．余り 2 が 5^1 の位の数字である.
1 を 5 で割ると商は 0，余りは 1 である．余り 1 が 5^2 の位の数字である.

$$36=1\cdot 5^2+2\cdot 5^1+1\cdot 5^0$$

以上より，$121_{(5)}$.

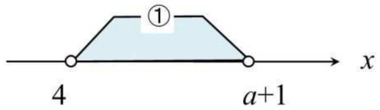
問題 3
第 1 問の問題 3 は，出題範囲を一部超えることが判明したため，受験者全員を正解として扱い得点を与えました．あわせてこの変更によって不利になる受験者がいないことを確認しました.

第 2 問

問題 1

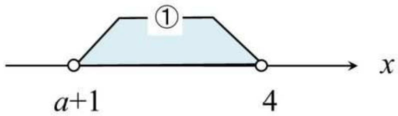
$x^2-(a+5)x+4(a+1)<0$　から　$(x-4)\{x-(a+1)\}<0$　‥‥ ①

(i)　　$a+1>4$ すなわち $a>3$のとき，①の解は，$4<x<a+1$.



(ii)　　$a+1=4$ すなわち $a=3$のとき，①は$(x-4)^2<0$より，（実数）解はなし.

(iii)　　$a+1<4$ すなわち $a<3$のとき，①の解は，$a+1<x<4$.



以上より，

$a>3$のとき，$4<x<a+1$

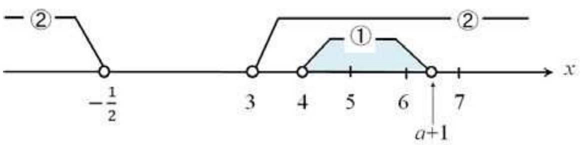
$a=3$のとき，（実数）解はなし

$a<3$のとき，$a+1<x<4$

問題 2

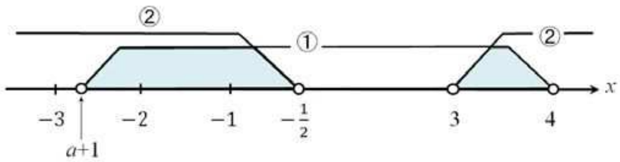
$2x^2-5x-3>0$から $(2x+1)(x-3)>0$ よって，$x<-\frac{1}{2}$，$x>3$　…　②

(i)　　$a+1>4$ すなわち $a>3$のとき，①の解は $4<x<a+1$ であり，①，②の不等式を同時に満たすxの範囲 $4<x<a+1$ に整数がちょうど 2 つ存在するのは，$6<a+1\leqq 7$のときである．よって，$5<a\leqq 6$.



(ii)　　$a+1=4$ すなわち $a=3$のとき，①を満たす（実数）x はない．よって，①，②を同時に満たす（実数）xは存在しない．

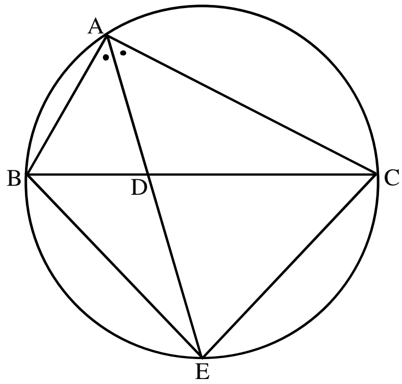
(iii)　　$a+1<4$ すなわち $a<3$のとき，①の解は $a+1<x<4$ であり，①，②の不等式を同時に満たすxの範囲 $a+1<x<-\frac{1}{2}$ と $3<x<4$ に整数がちょうど 2 つ存在するのは，$-3\leqq a+1<-2$である．よって，$-4\leqq a<-3$.



以上から，$-4\leqq a<-3$，$5<a\leqq 6$.

第 3 問

問題 1



正弦定理より,

$$\frac{13}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = 2\cdot\frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle\mathrm{ABC}$は鋭角より,

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

余弦定理より,

$$13^2 = 7^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\cdot7\cdot\mathrm{BC}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{BC}^2 - 7\mathrm{BC} - 120 = 0$$

$$(\mathrm{BC}-15)(\mathrm{BC}+8) = 0$$

$\mathrm{BC} > 0$より，$\mathrm{BC} = 15$.

問題 2

D は$\angle\mathrm{BAC}$の二等分線と辺 BC との交点より，$\mathrm{BD{:}CD} = 7:13$であるため,

$$\mathrm{CD} = \frac{13}{7}\cdot\mathrm{BD}$$

したがって,

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} + \mathrm{CD}$$

$$= \left(1+\frac{13}{7}\right)\cdot\mathrm{BD} = 15$$

$$\mathrm{BD} = \frac{21}{4}$$

余弦定理より,

$$\mathrm{AD}^2 = 7^2 + \left(\frac{21}{4}\right)^2 - 2\cdot7\cdot\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{637}{16}$$

$\mathrm{AD} > 0$より,

$$\mathrm{AD} = \frac{7\sqrt{13}}{4}$$

問題３

$\triangle$ ABEと$\triangle$ ADCが相似であることを証明する．

$\angle$BAEと$\angle$DACは，$\angle$BACを二等分したものであるから，

$$\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{DAC}$$

$\angle$AEBと$\angle$ACDは，弧ABの円周角であるから，

$$\angle \mathrm{AEB} = \angle \mathrm{ACD}$$

$\triangle$ ABEと$\triangle$ ADCの二組の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle \mathrm{ABE} \backsim \triangle \mathrm{ADC}$$

したがって，$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = \mathrm{BE} : \mathrm{CD}$であるから，

$$7 : \frac{7\sqrt{13}}{4} = \mathrm{BE} : \left(\frac{13}{7} \cdot \frac{21}{4}\right)$$

$$\mathrm{BE} = 3\sqrt{13}$$

（別解）

$\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{CAE}$より，$\mathrm{BE} = \mathrm{CE}$.

トレミーの定理より，　$\mathrm{BC} \cdot \mathrm{AE} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BE} + \mathrm{AB} \cdot \mathrm{CE}$　であるから

$$15 \cdot \mathrm{AE} = 13 \cdot \mathrm{BE} + 7 \cdot \mathrm{CE}$$

$$15 \cdot (\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) = (13 + 7) \cdot \mathrm{BE}$$

$$\mathrm{BE} = \frac{3}{4}\left(\frac{7\sqrt{13}}{4} + \mathrm{DE}\right)$$

ここで問題２より，

$$\mathrm{CD} = \frac{13}{7} \cdot \frac{21}{4} = \frac{39}{4}$$

方べきの定理より，　$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DE} = \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}$　であるから

$$\frac{7\sqrt{13}}{4} \cdot \mathrm{DE} = \frac{21}{4} \cdot \frac{39}{4}$$

$$\mathrm{DE} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$$

したがって，

$$\mathrm{BE} = \frac{3}{4}\left(\frac{7\sqrt{13}}{4} + \frac{9\sqrt{13}}{4}\right) = 3\sqrt{13}$$

第 4 問

問題 1
カードの枚数は 7 枚，重複するカードは A の 2 枚と K の 2 枚なので，

$$\frac{(7-1)!}{2!\,2!}=180$$

したがって，180 通り．

問題 2
H の隣に O が並ぶ組み合わせを考える．H と O を 1 つの文字と考えて，HO，A，K，K，D，A の 6 文字の並べ替えの組み合わせを考えることになるが，さらに H の右隣りに O が並ぶか，左隣に O が並ぶかの 2 パターンがある．また，重複するカードは A の 2 枚と K の 2 枚なので，

$$\frac{(6-1)!}{2!\,2!}\times 2=60$$

以上から，H の隣に O が並ぶ組み合わせは 60 通りになる．したがって，求める確率は

$$\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$$

問題 3

カードの枚数は 7 枚で，そのうち A は 2 枚，K は 2 枚，それ以外のカードが 3 枚ある．A と K 以外のカードを●で表すと，A の隣に K 以外のカードが並ぶ組み合わせは

(i) AA を 1 つにまとめて，その両隣に K 以外のカードが並ぶ場合：●AA●と●，K，K の並べ替えとなるので，

$$\frac{(4-1)!}{2!}\times 3! = 18$$

から，18 通り．

(ii) K 以外の 3 枚のカードで A を交互に挟む場合：●A●A●と K，K の並べ替えとなるので，

$$\frac{(3-1)!}{2!}\times 3! = 6$$

から，6 通り．

(i)と(ii)は排反なので，A の隣に K 以外のカードが並ぶ組み合わせは 24 通りになる．

したがって，A の隣に K が並ぶ確率は

$$1-\frac{24}{180}=\frac{13}{15}$$